Continuità Hölder via la proprietà della media

Lemma 1. *Supponiamo che $u \in H^1(B_R)$ sia una soluzione debole dell'equazione*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad B_R \ ,$$

dove $f \in L^p(B_R)$ per un qualche $p > {}^d/_2$. Allora, esiste una costante dimensionale C_d tale che per ogni $r \in (0, R)$

$$\left| \fint_{\partial B_r} u - u(0) \right| \le \frac{C_d}{2 - {}^d/_p} \|f\|_{L^p(B_r)} r^{2 - {}^d/_p}.$$

Di conseguenza, si ha anche

$$\left| \fint_{B_r} u - u(0) \right| \le \frac{C_d}{2 - {}^d/_p} \|f\|_{L^p(B_r)} r^{2 - {}^d/_p}.$$

Lemma 2. *Sia $u \in H^1(B_R)$ una soluzione debole e positiva dell'equazione*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad B_1 \ ,$$

dove $f \in L^p(B_1)$ per un qualche $p > {}^d/_2$. Allora esiste una costante

$$\rho \in (0, 1)$$

che dipende da d e da p tale che

$$|u(x) - u(y)| \le C|x - y|^\alpha \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in B_\rho,$$

dove

$$\alpha = \frac{2p - d}{3p - d}$$

e la costante C è data da

$$C = C_d \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \frac{p\, \|f\|_{L^p(B_1)}}{2p - d} \right),$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Proof. Siano $x, y \in B_\rho$, dove il raggio ρ sarà scelto in seguito. Definiamo

$$\delta := |x - y|$$

e usando il lemma precedente calcoliamo

$$\begin{aligned}
u(x) &\le \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x)} u + \frac{p\, C_d \|f\|_p}{2p - d} \, R^{2 - {}^d/_p} \\
&\le \frac{1}{|B_R|} \int_{B_{R+\delta}(y)} u + \frac{p\, C_d \|f\|_p}{2p - d} \, R^{2 - {}^d/_p} \\
&= \left(\frac{R + \delta}{R} \right)^d \frac{1}{|B_{R+\delta}|} \int_{B_{R+\delta}(y)} u + \frac{p\, C_d \|f\|_p}{2p - d} \, R^{2 - {}^d/_p} \\
&\le \left(1 + \frac{\delta}{R} \right)^d \left(u(y) + \frac{p\, C_d \|f\|_p}{2p - d} \, (R + \delta)^{2 - {}^d/_p} \right) + \frac{p\, C_d \|f\|_p}{2p - d} \, R^{2 - {}^d/_p}.
\end{aligned}$$

Sceglieremo

$$R = \delta^\sigma.$$

Siccome $\delta < 1$, abbiamo che

$$\left(1 + \delta^{1 - \sigma} \right)^d \le 1 + 2^d \delta^{1 - \sigma}.$$

Ora se

$$\delta^{1 - \sigma} \le 1,$$

abbiamo che

$$\begin{aligned}
u(x) &\le \left(1 + 2^d \delta^{1 - \sigma} \right) \left(u(y) + \frac{p\, C_d \|f\|_p}{2p - d} \, (\rho + \delta)^{2 - {}^d/_p} \right) + \frac{p\, C_d \|f\|_p}{2p - d} \, \rho^{2 - {}^d/_p} \\
&\le u(y) + C_d \|u\|_{L^\infty(B_1)} \delta^{1 - \sigma} + \frac{p\, C_d \|f\|_p}{2p - d} \, \delta^{\sigma(2 - {}^d/_p)},
\end{aligned}$$

e quindi, scegliendo σ tale che

$$1 - \sigma = \sigma \left(2 - \frac{d}{p}\right),$$

otteniamo

$$u(x) - u(y) \leq C_d |x - y|^{1-\sigma} \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \frac{p\, \|f\|_{L^p(B_1)}}{2p - d} \right).$$

Infine, calcoliamo

$$\sigma = \frac{p}{3p - d} \qquad \text{e poniamo} \qquad \alpha := 1 - \sigma = \frac{2p - d}{3p - d}.$$

□

Come corollario immediato abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 3. *Sia $u \in H^1(B_1)$ una soluzione debole dell'equazione*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad B_1 \ ,$$

dove $f \in L^p(B_1)$ per un qualche $p > d/2$. Allora esiste una costante $\rho \in (0,1)$, che dipende da d e da p, tale che

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(B_\rho)} \leq C_d \left(\operatorname*{osc}_{B_1} u + \frac{p\, \|f\|_{L^p(B_1)}}{2p - d} \right),$$

dove C_d è una costante dimensionale e $\alpha = \frac{2p-d}{3p-d}$.